





Semestre : 2
Module : Méthodes Quantitatives
Elément : Mathématiques Economiques
Enseignant : Mr BENMOUSSA

Eléments du cours

- Les Fonctions
- Les Intégrales simples
- Les Intégrales doubles
- Extrêmes de fonctions de deux variables

Numérisation & Conception
Mr Mohamed-Fadil ZIADI

Le Portail des Etudiant d'Economie
www.e-tahero.net
contact@e-tahero.net

PROGRAMME

I- Les Fonctions :
- Fonctions trigonométriques.
- Fonctions e^x.
- Fonction log x.
- Elasticité.

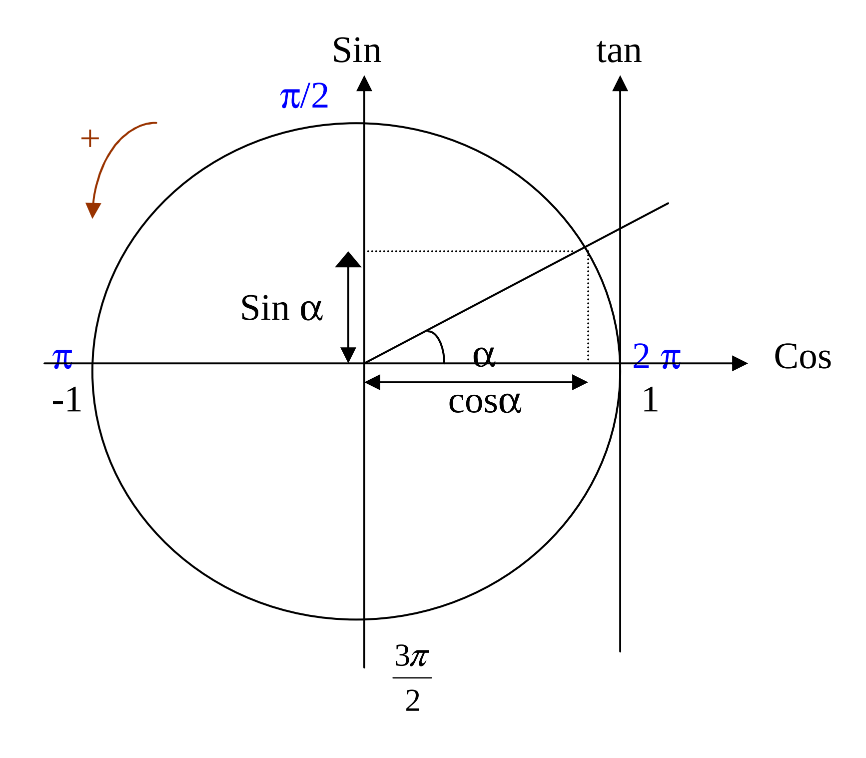
II- Les Intégrales simples :
- Par parties.
- Par changement de variables.
- Fractions rationnelles.
- Fractions irrationnelles.
- Intégrales impropres.

III- Les Intégrales doubles.

IV- Extrêmes de fonctions de deux variables.

Chapitre 1 : FONCTIONS TRIGONOM2TRIQUES.

I- Définition : cercle trigonométrique :



Rayon = 1.

R = 1 ⇒ $\begin{cases} -1 \leq \cos\alpha \leq 1 \\ -1 \leq \sin\alpha \leq 1 \\ -\infty < \text{tg}\,\alpha < +\infty \end{cases}$

α	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
Cos α	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	½
Sin α	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tg α	0	1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$

- α $\begin{cases} \text{Sin}(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha \end{cases}$

π - α $\begin{cases} \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \\ \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \\ \text{tg}(\pi-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha \end{cases}$

$\pi + \alpha$
$$\begin{cases} \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \\ tg(\pi + \alpha) = tg\,\alpha \end{cases}$$

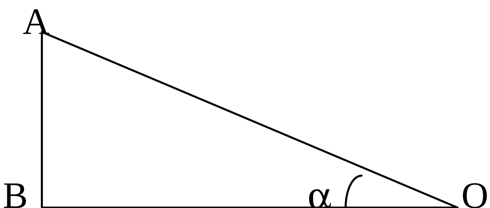
$\frac{\pi}{2} + \alpha$
$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha \end{cases}$$

$$tg(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{1}{tg\alpha} = -\text{cotg}\,\alpha.$$

II- Formules trigonométriques:

Sin (a + b) = sin a cos b + cos a sin b.
Sin (a – b) = sin a cos b – cos a sin b.
Cos (a + b) = cos a cos b – sin a sin b.
Cos (a – b) = cos a cos b + sin a sin b.
Sin 2a = 2 sin a cos a.
Cos 2a = $\cos^2 a - \sin^2 a$.

Théorème de Pythagore :



$OA^2 = AB^2 + OB^2$

$\Rightarrow 1^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$

$\Rightarrow 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$$tg\,2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha.\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}. \qquad = \frac{2tgx}{1 - tg^2\alpha}.$$

$$= \frac{\frac{2\sin\alpha.2\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

III- Dérivées des fonctions trigonométriques :

f (x)	f ′ (x)
sin x	cos x
cos x	- sin x
tg x	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$
cos (ax + b)	- a . sin (ax + b)
sin (ax + b)	a . cos (ax + b)

IV- Fonctions réciproques :

Y = cos x ⇔ x = arcos y

Y = sin x ⇔ x = arc sin y

Y = tg x ⇔ x = arc tg y

V- Etude de la fonction (y = sin x) :

1- Domaine de définition :

$D_f = \Re$.

2- Parité :

Si f (-x) = f (x). ⇒ la fonction est paire.

Si f (-x) = - f (x) ⇒ la fonction est impaire.

Donc sin (-x) = - sin (x) ⇒ y est une fonction impaire.

3- Périodicité :

Une fonction est périodique de période T.

⇔ f (x + T) = f (x).

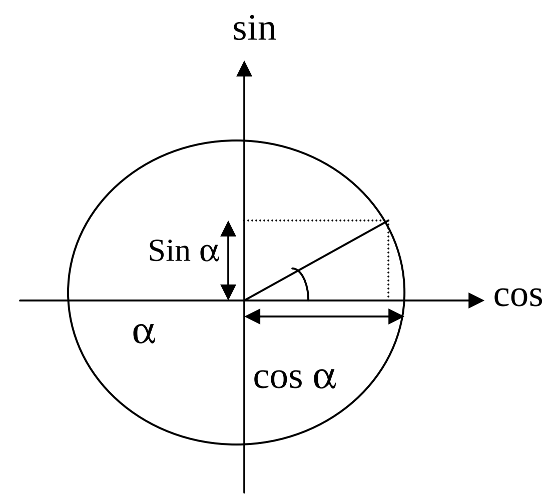
y = sin (x)

sin (α + 2π) = sin α.

Sin (α + 4π) = sin α.

Sin (α + kπ) = sinα.

Donc dans ce cas T = 2π



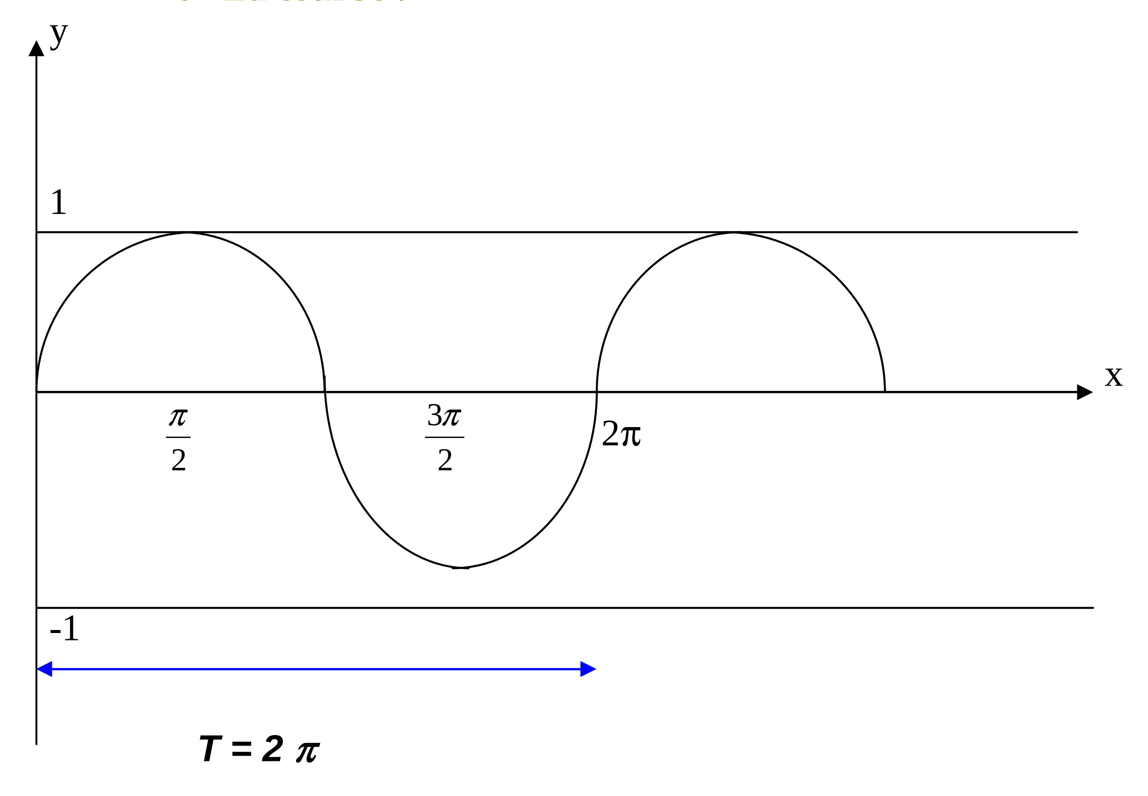
4- Dérivée :

$$y' = \cos x \iff \begin{cases} \cos x \geq 0 \iff -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x \leq 0 \iff \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

5- Tableau de variation :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y ′	+	-	+	
y	0 ↗ 1	1 ↘ -1	-1 ↗ 0	0

6- La courbe :



T = 2 π

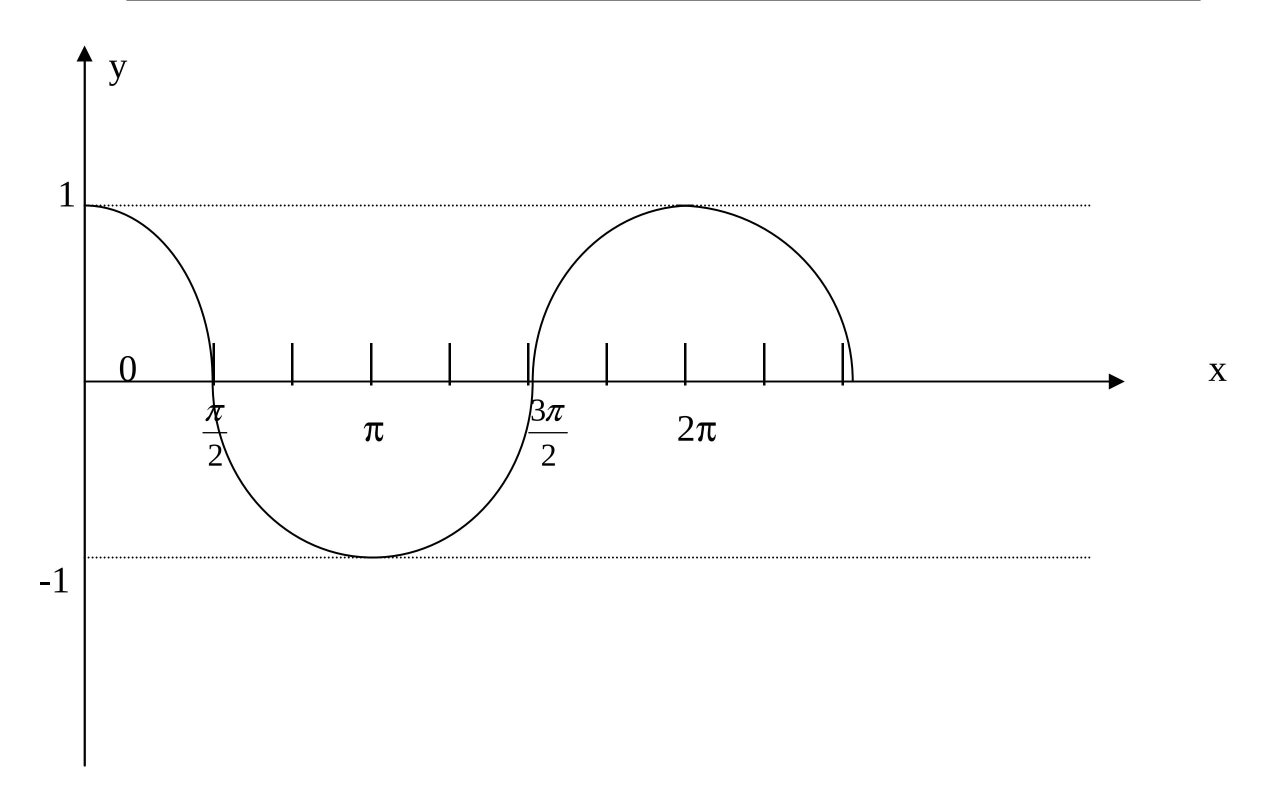
VI- Etude de la fonction (y = cos x) :

La dérivée de cette fonction est la suivante :

$y' = -\sin x$.

La table de variation se présente comme suit :

x	0		π		2π	
y ′		-		+		-
y		1 ↘	-1	↗	1	↘



VII- Etude de la fonction (y = tg x) :

1- Période :

Tg (α + π) = tg α ⇒ tg α est périodique et T = π.

2- Parité :

tg (-x) = -tg x ⇒ y = tg x est impaire.

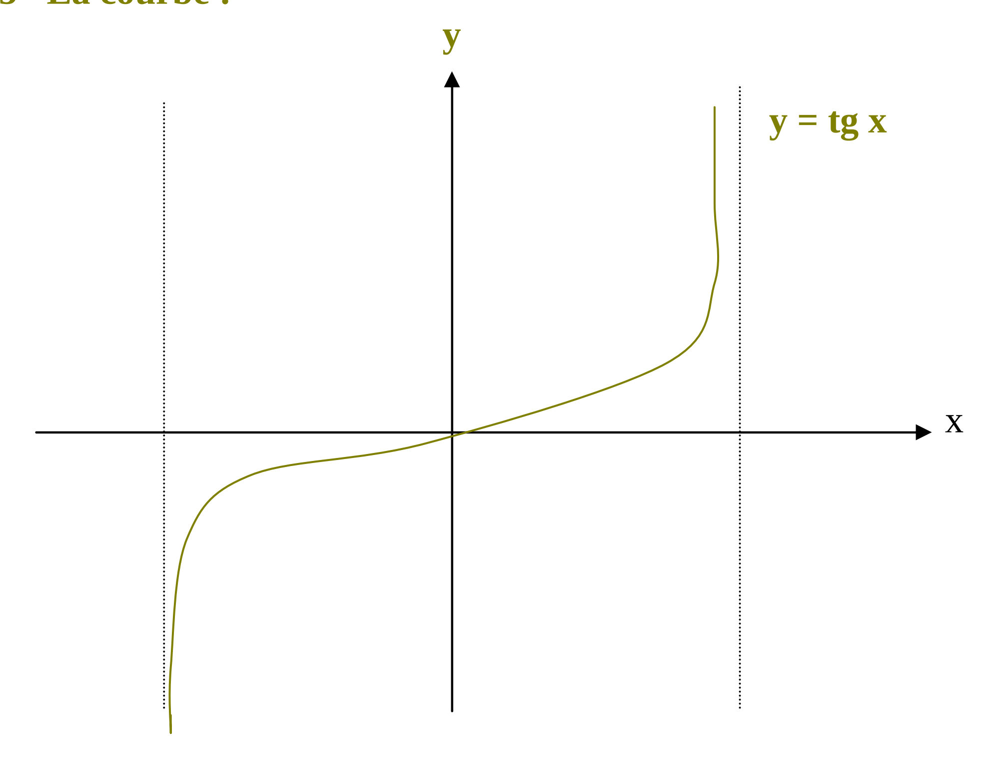
3- Dérivée :

$y' = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$.

4- Le tableau de variation :

x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
y'	+	
y	$-\infty$ ↗	$+\infty$

5- La courbe :



Remarque : les asymptotes :

VIII- Exercices :

1/ Calculer le (sin x) et la (tg x), sachant que $\cos x = 1 - \sqrt{2}$.
2/ Résoudre dans RR les équations :
a- $2 \sin 3x = 1$.
b- $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution :
1- On sait que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.
On sait aussi que : $\cos x = 1 - \sqrt{2}$.

$\Rightarrow \cos^2 x = (1- \sqrt{2})^2 = 1- 2\sqrt{2} + 2.$

$\Rightarrow \sin^2 x = 1- (1- 2\sqrt{2} + 2).$

$\Rightarrow \sin^2 x = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1).$

$\Rightarrow$ **sin x =** $\pm\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$ **=** $\pm\sqrt{\sqrt{2}-1} \times \sqrt{2}$

- tg = ?

On sait que $1+ \lg^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$\Rightarrow tg^2\, x = \frac{1}{\cos^2 x}$ -1.

$\Rightarrow tg^2\, x = \frac{1}{(1-\sqrt{2})^2} - 1 = \frac{1-(1-\sqrt{2})^2}{(1-\sqrt{2})^2} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{(1-\sqrt{2})^2}.$

$\Rightarrow tg^2\, x = - \frac{2}{(1-\sqrt{2})}.$

$\Rightarrow tg^2\, x = \pm\sqrt{\frac{-2}{(1-\sqrt{2})}} = \pm\sqrt{\frac{2}{(\sqrt{2}-1)}}.$

2- a- 2 sin (3x) = 1

$\Rightarrow \sin 3x = 1/2$

$\Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{6}.$

Observation: $\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} * \; x = \alpha + 2k\pi. \\ * \; x = (\pi - \alpha) + 2k\pi. \end{cases}$

$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} * \; x = \alpha + 2k\pi. \\ * \; x = - \alpha + 2k\pi. \end{cases}$

Donc : $\sin 3x = \sin\frac{\pi}{6}.$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi. & ; (k\in Z) \\ 3x = (\pi - \frac{\pi}{6}) + 2k\pi. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} & ; (k\in Z) \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

b- $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi. \\ 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi. \end{cases} \quad ; \ (k \in Z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{2} \end{cases} \quad ; \ (k \in Z)$$

☛ **Consequences:**

Il existe quatre solutions :

- $x_1 = \frac{\pi}{12}$.
- $x_2 = \frac{\pi}{12} + \pi$.
- $x_3 = -\frac{\pi}{12}$.
- $x_4 = -\frac{\pi}{12} + \pi$.

Chapitre 2 : FONCTION « $y = e^x$ »

I- Définition :

$e^0 = 1$
$e = 2,718$.

II- Propriétés :

1- $y' = e^x$.
2- $e^{a+b} = e^a . e^b$
3- $e^{a.b} = (e^a)^b$
4- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

III- Etude de la fonction $f(x) = e^x$:

1- e^x est strictement croissante.
2- $D_f = \Re =]-\infty, +\infty[$
3- $\lim_{+\infty} e^x = +\infty$.

$\lim_{0} \frac{e^n - 1}{h} = 1$.

$\lim_{-\infty} e^x = 0$.

☛ Exercice:

1- Simplifier les expressions suivantes:
a- $e^x . e^{-2x}$
b- $(e^{2x})^2 . (e^{-3x})^4$.
c- $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$.

2- Soit la fonction : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

a- Calculer $\lim_{-\infty} f(x)$ et $\lim_{+\infty} f(x)$.

3- Calculer $\lim_{0} (\frac{e^x - 1}{3x})$.

☛ Solution:

1- a- $e^x . e^{-2x} = e^{-x}$.
b- $(e^{2x})^2 . (e^{-3x})^4 = e^{4x} . e^{-12x} = e^{-8x}$.
c- $(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) = 4$.

2- On considère que : f(x) = $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

$\lim_{-\infty} f(x) = -1.$

$\lim_{+\infty} f(x) = \frac{e^x}{e^x} \left[\frac{1 - 1/e^x}{1 + 1/e^x}\right] = 1.$

Car on sait que $\lim_{+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

3- $\lim_{0} \frac{e^x - 1}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{0} \frac{e^x - 1}{x}.$

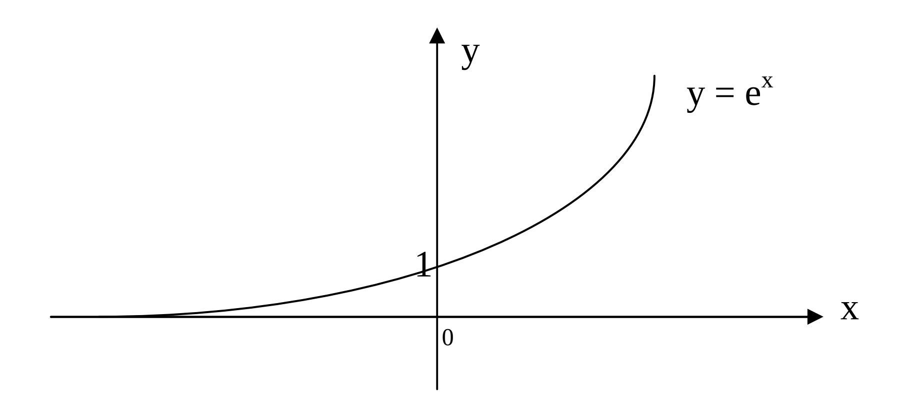
$= \frac{1}{3}.$

IV- Tableau de variation:

x	-∞	0	+∞
y'		+	
y	0 ↗	1	+∞

Car on sait que : y' = $e^x \neq 0$.

☛ **La courbe :**



V- Autres limites :

$\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$

$\lim_{-\infty} x\, e^x = 0.$

VI- Equations et inéquations:

* $e^a = e^b \Rightarrow a = b$.
* $e^a > e^b \Rightarrow a > b$. Car e^x est strictement croissante.

VII- Exercices :

1- Calculer $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} (e^x – x + 1)$.

2- Etudier le sens de variation de la fonction : $f(x) = (x – 2)e^x$.

☛ **Solution :**

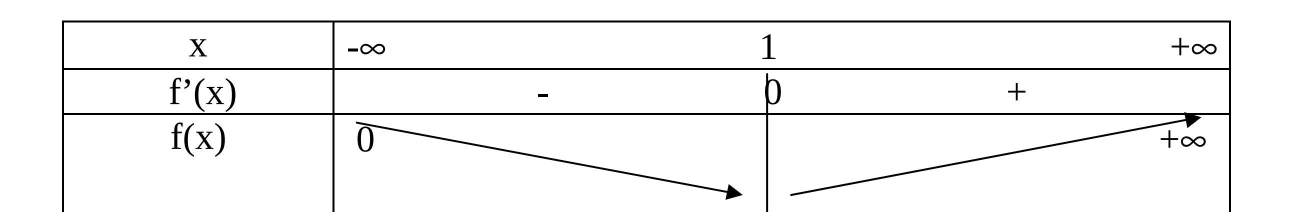
1- $\lim\limits_{+\infty} (e^x – x + 1) = \lim\limits_{+\infty} (\frac{e^x}{x} - 1 + \frac{1}{x}) = +\infty$.

2- $D_f = \Re =]-\infty,+\infty[$.

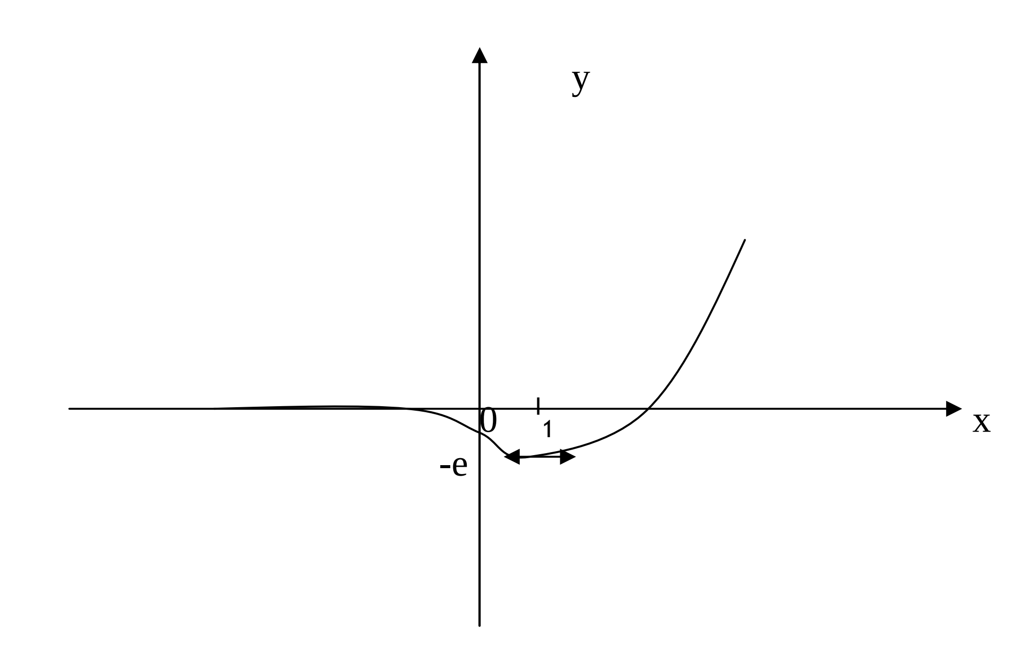
On sait qu'au règle générale : $(f.g)' = f'.g + f.g'$

$f'(x) = e^x + (x – 2)e^x = e^x (1 + x – 2)$

$= e^x (x – 1)$.



x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	0 ↘		↗ $+\infty$



Chapitre 3 : FONCTIONS LOGARITHMES.

I- Définition :

On appelle logarithmes de base « a » :

$$y = \frac{\log(x)}{\log(a)}.$$

Cas particulier : quand a = e $\Rightarrow$ y = log x (c'est le logarithme népérien).

$$y = \log x = \int_1^x \frac{1}{x}\,dx. \qquad x > 0.$$

Pour: x = 1 $\Rightarrow$ log 1 = 0 = $\int_1^1 \frac{1}{x}\,dx$.

Pour : $x = 0^+$ $\Rightarrow$ log x = - ∞.

1- Dérivée :

$y = \log x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$.

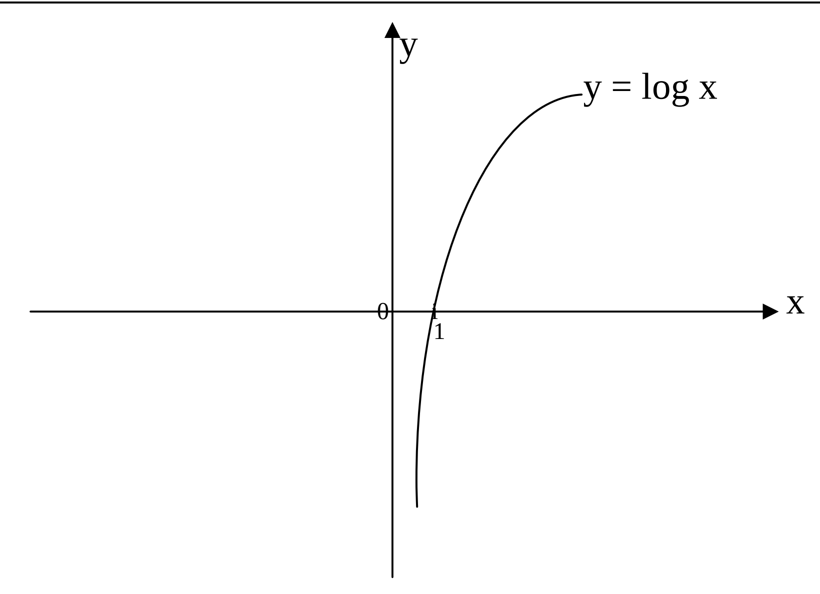
2- Propriétés:

* log (a.b) = log a + log b.
* log $\frac{a}{b}$ = log a – log b.
* log $\frac{1}{a}$ = - log a.
* log a^n = n. log a

II- Etudier la fonction y = log x :

* $D_f = \left]0,+\infty\right[$
* $y' = \frac{1}{x} \neq 0$.

x	0^+	1	$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$	0 ↗	$+\infty$



☛ **Exercices :**

Etude des fonctions :

a- $y = 3 \log x + 2$.

b- $y = \log (x - 2)$.

Solutions :

a- $D_f =]0,+\infty[$

$f'(x) = \frac{3}{x}$.

x	0^+	1	$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$ ↗	2	$+\infty$

b- $D_f =]2,+\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x-2}$

x	2	3	$+\infty$
f'(x)	‖	+	
f(x)	‖ $-\infty$ ↗	0	$+\infty$



III- Limites :

* $\lim\limits_{+\infty} \ln x = +\infty$.
* $\lim\limits_{0^+} \ln x = -\infty$.
* $\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^-$
* $\lim\limits_{0} x \ln x = 0^-$
* $\lim\limits_{1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
* $\lim\limits_{0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

IV- Exercices:

1- Etude de la fonction : $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.
Et tracer le graphique.
2- Etude de la fonction : $y = x \log x - 3x$.
3- Etude de la fonction : $y = (x-2)\, e^{-\frac{1}{x}}$.

☛ **Solution :**

1- Etude de la fonction : $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

* $D_f = \Re^* =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ car on a ($x \neq 1$).

* $y' = 2x.\, e^{\frac{1}{x}} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right).\, e^{\frac{1}{x}}$

$= (2x-1).\, e^{\frac{1}{x}}$.

On a: $y' = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0$ ou $e^{\frac{1}{x}} = 0$.

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ on sait que $e^{\frac{1}{x}} > 0$ donc : $e^{\frac{1}{x}} \neq 0$.

Donc le tableau de variation est le suivant :

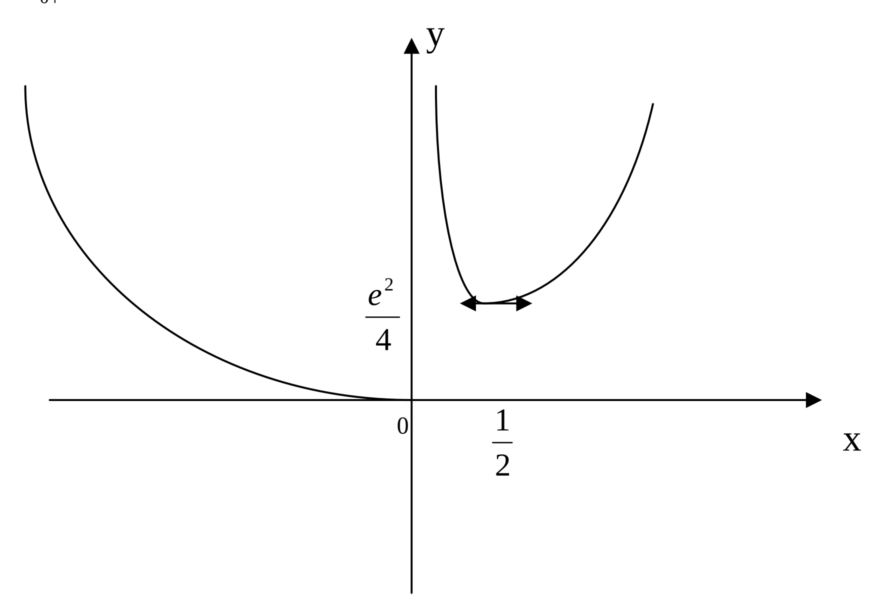
x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		-	||	-	|	+	
y	$+\infty$	↘ 0	||	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{4}e^2$	↗	$+\infty$

* $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} (x^2.\ e^{\frac{1}{x}}) = +\infty$

* $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} (x^2.\ e^{\frac{1}{x}}) = +\infty$

* $\lim\limits_{0^-} f(x) = \lim\limits_{0^-} (x^2.\ e^{\frac{1}{x}}) = 0$

* $\lim\limits_{0+} f(x) = \lim\limits_{0+} (x^2.\ e^{\frac{1}{x}}) = 1$



2- Etude de la fonction : y = x log x – 3x.

* $D_f =]0,+\infty[$.
* y' = (x log x)' – (3x)' = log x + x (log x)' – 3
 y' = log x – 2.

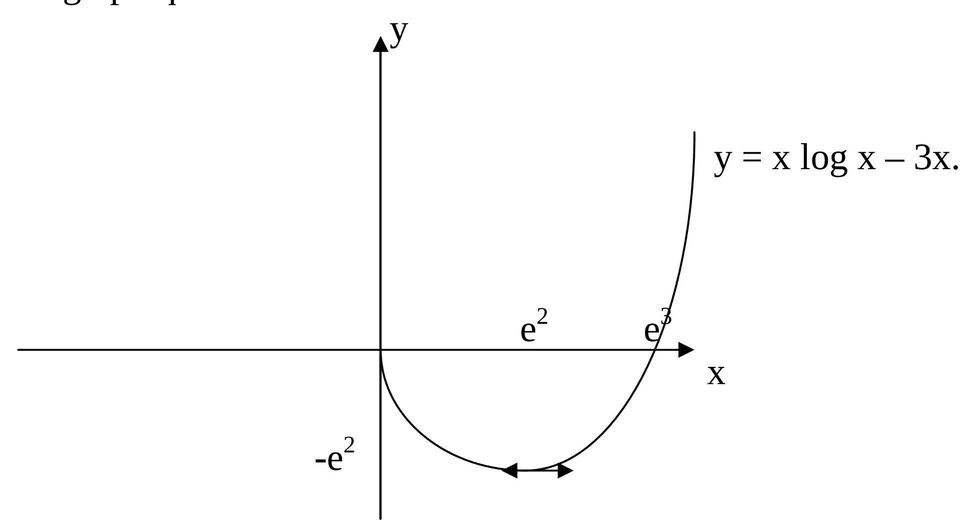
On a : y' = 0 $\Leftrightarrow$ log x – 2 = 0.
 $\Leftrightarrow$ x = e^2.

* Tableau de variation :

x	0	e^2	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$ ↘	e^{-2}	↗ $+\infty$

* $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} x.(\log x - 3) = +\infty$.
* $\lim\limits_{0+} f(x) = \lim\limits_{0+} x.\log x - 3x = 0$

* Représentation graphique:



3- Etude de la fonction : $y = (x-2)\, e^{-\frac{1}{x}}$:

* $D_f = \Re^* = \left]-\infty,0\right[\cup \left]0,+\infty\right[$

* $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + (x-2).\ \frac{1}{x^2}.\ e^{-\frac{1}{x}}$

$= e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x-2}{x^2}.\ e^{-\frac{1}{x}}$

$= e^{-\frac{1}{x}}\ (1 + \frac{x+2}{x^2}).$

$= e^{-\frac{1}{x}}\ (\frac{x^2+x+2}{x^2}).$

On a $f'(x) = 0 \iff e^{-\frac{1}{x}}(\frac{x^2+x+2}{x^2}) = 0$

On sait que $e^{-\frac{1}{x}} \neq 0$ et $x^2 \neq 0$.

Donc $x^2 + x + 2 = 0$

$\Delta = 9 = 3^2$.

$x_1 = 1$ et $x_2 = -2$.

* Tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		+	|	-	||	-	|	+	
y	$-\infty$	↗	$-4\sqrt{2}$	↘ $-\infty$	|| 0	↘		↗	$+\infty$

* $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} (x-2)\ e^{-\frac{1}{x}} = -\infty.$

* $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} (x-2)\ e^{-\frac{1}{x}} = +\infty.$

* $\lim\limits_{0^-} f(x) = \lim\limits_{0^-} (x-2)\ e^{-\frac{1}{x}} = -\infty.$

* $\lim\limits_{0+} f(x) = \lim\limits_{0+} (x-2)\ e^{-\frac{1}{x}} = 0.$

* Asymptotes obliques:

- $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{(x-2).e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{x}.(1 - \frac{2}{x}).\ e^{-\frac{1}{x}}.$

$\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$

- $\lim\limits_{+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{+\infty} (x-2).\ e^{-\frac{1}{x}} - x.$

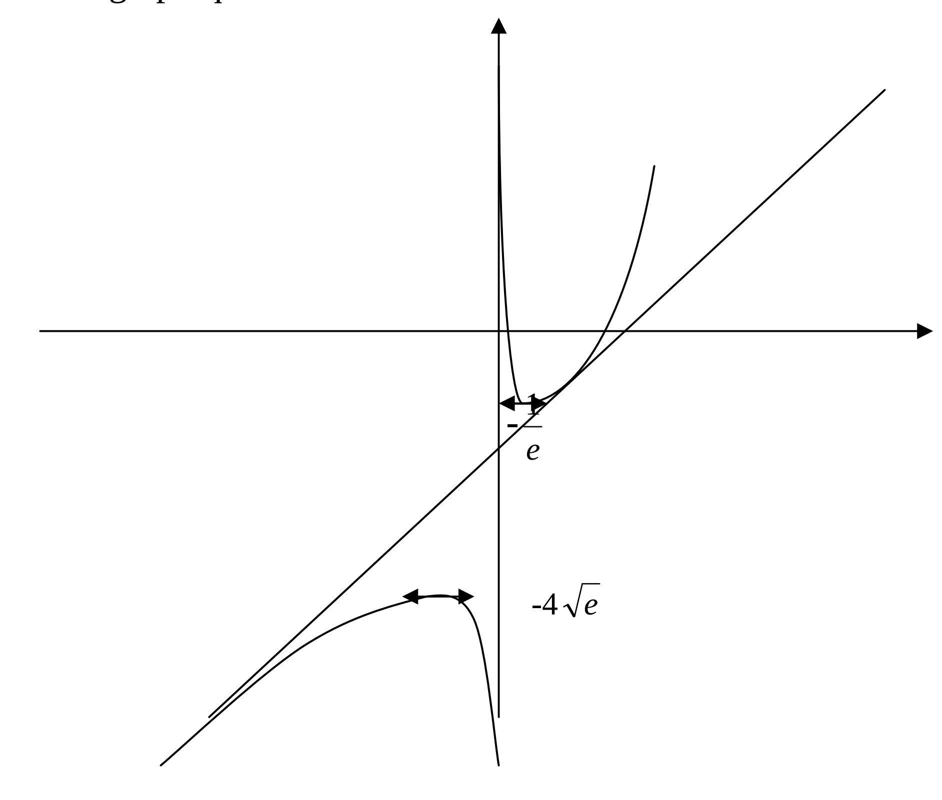
$= \lim\limits_{+\infty} x\ e^{-\frac{1}{x}} - 2\ e^{-\frac{1}{x}} - x.$

$= \lim\limits_{+\infty} x\ [e^{-\frac{1}{x}} - 1] - 2\ e^{-\frac{1}{x}}.$

On met: $X = -\frac{1}{x}.$

Donc : $\lim\limits_{+\infty} -\frac{1}{X}\ [e^X - 1] - 2\ e^X = -3.$

* Représentation graphique :

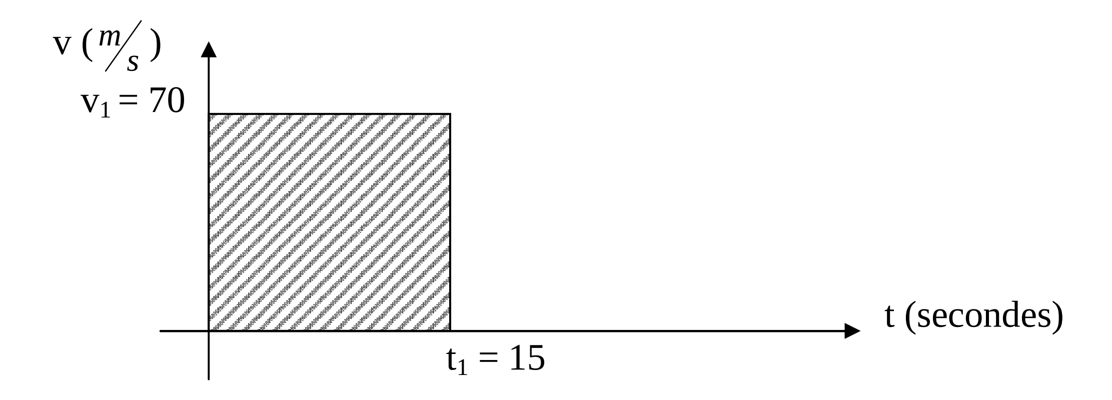


Chapitre 4 : INTEGRALES

I- Principes :

1- 1er cas :

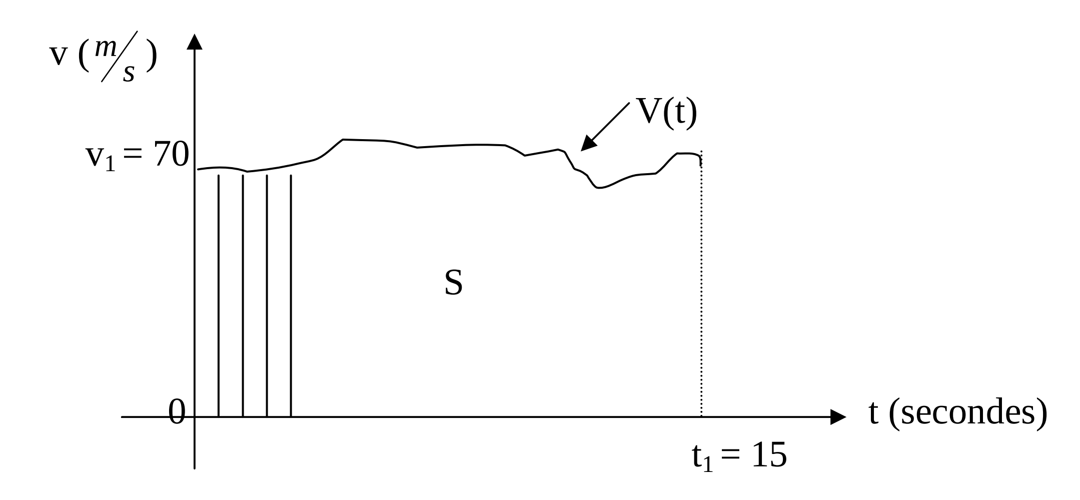
Un train roule à la vitesse de $v = 70\ {}^{m}/_{s}$ Durant un temps de t = 15 secondes.
Quelle est la distance parcourue par le train ?
On sait que : d = v.t donc : d = 70 * 15 = 1050 m.



d = v.t = aire du rectangle hachuré.

2- 2ème cas :

La vitesse du train n'est pas constante et varie en fonction du temps « t », donc v= v(t).
On sait que : d = v.t.
Donc : d(t) = v(t) . t.

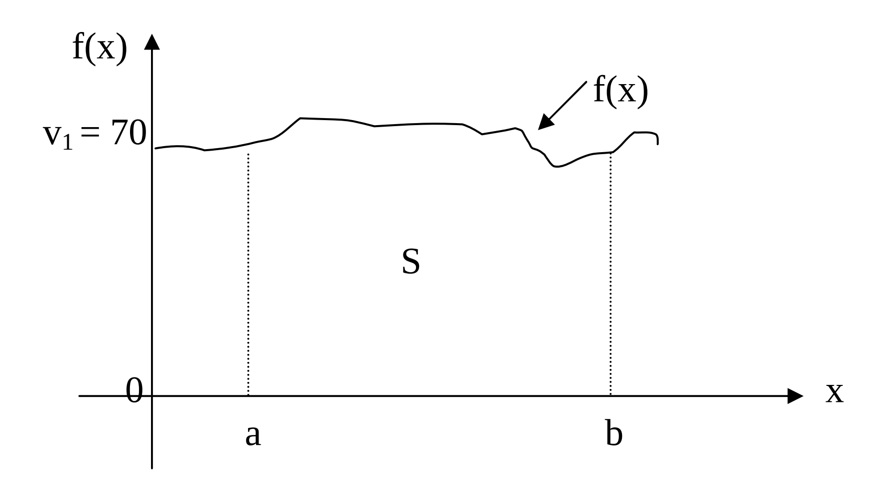


$$d = \sum di = \int_0^{15} f(t)\ dt = S.$$

C'est la somme des aires des petits rectangles.

II- Intégrale d'une fonction sur un intervalle :

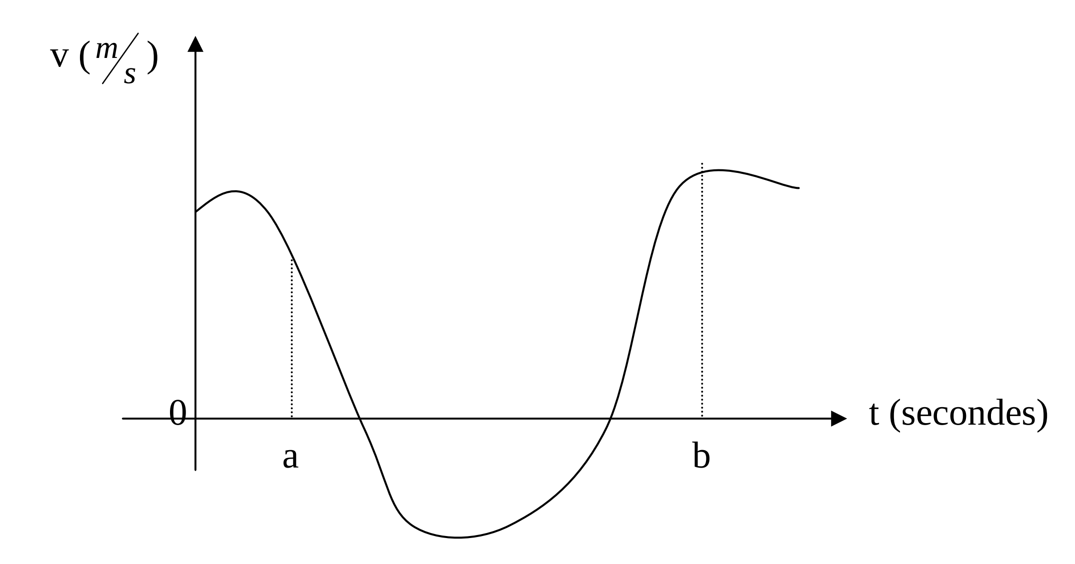
1- Définition :



$$I = \int_a^b f(x)\ dx = \text{aire } S.$$

☛ **Remarque:**

L'intégrale (aire) peut être positif ou négatif.



2- Propriétés :

Si « f » est constante $\Rightarrow$ I = $\int_a^b kf(x)$ dx.

I = k (b – a).

3- Valeur moyenne d'une fonction f(x) :

M = $\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)$ dx.

III- Propriétés générales d'une intégrale :

1- Théorème :

Toute fonction continue sur un intervalle I = $[a,b]$ admet un intégrale.

2- Propriétés :

* $\int_a^a f(x)$ dx = 0.
* $\int_a^b f(x)$ dx = -$\int_b^a f(x)$ dx.
* $\int_a^b f(x)$ dx + $\int_b^c f(x)$ dx = $\int_a^c f(x)$ dx.
* $\int_a^b kf(x)$ dx = k $\int_a^b f(x)$ dx.
* $\int_a^b f(f+g)(x)$ dx = $\int_a^b f(x)$ dx + $\int_a^b g(x)$ dx.
* Si f(x) ≤ g(x) $\Rightarrow$ $\int f(x) \leq \int g(x)$.

IV- Primitives d'une fonction :

1- Théorème :

Soit f(x) une fonction continue sur I = $[a,b]$.
L'application : F : x $\rightarrow$ F(x) = $\int f(t)$ dt est dérivable sur I, et la dérivé de F(x) est F'(x) = f(x).

2- Propriétés :

Toute fonction f(x) continue sur I possède plusieurs primitives.
Si « f » admet une primitive « F » sur I, alors « G = F + k » est aussi primitive de « f ». Avec « k » constante.

L'intervalle « I »	Fonction « f »	Primitive « F »
$\Re$	a	ax + b
$\Re$	x	$\frac{1}{2}x^2 + c$
$\Re$	x^n ; $n \in \aleph$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$\Re_*^+$ ou $\Re_*^-$	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$
$\Re_*^+$ ou $\Re_*^-$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$
$\Re_*^+$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
$\Re_*^+$	x^r ; $r \in (Q/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$
$\Re$	$\frac{1}{1+x^2}$	Artan x + c
$\Re$	Cos x	Sin x + c
$\Re$	Sin x	- cos x + c
$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{(\cos)^2}$	Tan x + c
$]k\pi;\pi+k\pi[$	$1+\text{cotan}^2 x = \frac{1}{(\sin)^2}$	- cotan x + c
« u » est dérivable sur I et strictement positive sur I	$u' \times u^n$; $n \in (Q/\{-1\})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$
« u » est dérivable sur I et strictement positive sur I	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$
« u » est dérivable sur I	$\frac{u'}{1+u^2}$	Arctan (u) + c
« v » est dérivable et ne s'annule pas sur I	$\frac{v'}{v^2}$	$-\frac{1}{v} + c$
« u et v » sont dérivables sur I	u' + v'	u + v + c
« u et v » sont dérivables sur I	u'v + uv'	u.v + c
« u et v » sont dérivables sur I et $v \neq 0$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v} + c$
« v » est dérivable sur I et « u » est dérivable sur v(I)	$u'(v_{(x)}) \times v'(x)$	$(uov)_{(x)} + c$
$\Re$	Cos (ax + b) ; $a \neq 0$	$(1/a)$ sin (ax + b) + c
$\Re$	sin (ax + b) ; $a \neq 0$	$-(1/a)$ cos (ax + b) + c

V- Intégration par partie :

$\int U'V$ = U.V - $\int U.V'$.

☛ **Exemples :**

Calculer les intégrales suivantes :

1- I = $\int_0^{\pi} x.\cos x$ .dx .

On pose: $\begin{cases} V = x \\ U' = \cos x \end{cases}$ $\begin{cases} V' = 1 \\ U = \sin x \end{cases}$

I = $[x. \sin x]^{\pi}_0$ - $\int_0^{\pi} \sin x$ .dx

= $[x. \sin x]^{\pi}_0 + [\cos x]^{\pi}_0$

= (π. Sin π - 0) + (cos π - cos 0).

I = -2.

2- I = $\int (x^2 + \frac{2}{x})$ dx.

I = $\int x^2$ dx + $\int \frac{2}{x}$ dx.

I = $\frac{x^3}{3}$ + 2 log x + k.

3- I = $\int_2^4 x\sqrt{x^2 + 4}$ dx.

I = $\frac{1}{2} \int_2^4 2x(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}$ dx.

I = $\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+4}{\frac{1}{2}+1}\right)^{\frac{1}{2}+1}$ dx . = $\frac{1}{3}$ $(x^2 + 4)^{\frac{3}{2}}$.

Car on sait que: $\int U'U^m = \frac{U^{m+1}}{m+1}$.

4- I = $\int 5x^3\sqrt{x^4 + 1}$ dx.

I = $\int 5x^3(x^4 + 1)^{\frac{1}{2}}$ dx.

$$= \frac{5}{4} \frac{(x^4+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{15}{16}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}.$$

5- $I = \int_1^e \log x \, dx.$

On pose : $\begin{cases} U' = 1 \\ V = \log x \end{cases}$ $\begin{cases} U = x \\ V' = \frac{1}{x} \end{cases}$

$I = [x \log x]^e_1 - \int_1^e dx = [x \log x - x]^e_1.$

$I = 1.$

6- $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \, dx.$

On sait que : $\int \sin(ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b).$

Donc: $I = [-\frac{1}{2}\cos(2x + \frac{\pi}{4})] = -\frac{1}{2}[\cos(\pi + \frac{\pi}{4}) - \cos\frac{\pi}{4}].$

On sait que : $\cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4}.$

Donc : $I = -\frac{1}{2}[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}] = \frac{1}{2}.\sqrt{2}$

7- $I = \int_0^1 (2t-4)e^t \, dt.$

On pose : $\begin{cases} U = (2t-4) \\ V' = e^t \end{cases}$ $\begin{cases} U' = 2 \\ V = e^t. \end{cases}$

$I = \int_0^1 (2t-4)e^t \, dt = [e^t(2t-4)]^1_0 - \int_0^1 2e^t \, dt.$

$= [e(-2) - (-4)] - 2[e^t]^1_0.$

$= -4e + 6.$

8- $I = \int_1^e \frac{\log x}{x^2}\, dx.$

On pose : $\begin{cases} V = \log x \\ U' = \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $\begin{cases} V' = \frac{1}{x} \\ U = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$I = [-\frac{1}{x}.\log x]^e_1 + \int_1^e \frac{1}{x^2}\, dx.$

$= [-\frac{1}{e}. \text{Log } e + 1. \log 1] - [\frac{1}{e} - 1].$

$= -\frac{2}{e} + 1.$

9- $I = \int_0^\pi 2t \sin t\, dt.$

On pose : $\begin{cases} V = 2t \\ U' = \sin t \end{cases}$ $\begin{cases} V' = 2 \\ U = -\cos t. \end{cases}$

$I = -[2t.\cos t]^\pi_0 + \int_0^\pi 2\cos t\, dt.$

$= -[2\pi \cos \pi - 0] + 2[\sin t]^\pi_0.$

$= 2\pi.$

VI- Décomposition :

Décomposition de : $R(x) = \frac{1+x}{(x+4)^2(x-1)}.$

$R(x) = \frac{1+x}{(x+4)^2(x-1)} = \frac{A}{(x+4)} + \frac{B}{(x+4)^2} + \frac{C}{(x-1)}.$

* Calculer B : $B = \frac{3}{5}$

* Calculer C : $C = \frac{2}{25}$

* Calculer A : $A = -\frac{2}{25}$

3- Lorsque d° P(x) ≥ d° Q(x) :

La méthode des calcules est la division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} & p(x) \\ \cline{1-1} r(x) & \end{array}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} \qquad \text{avec } d° \, r(x) < d° \, Q(x).$$

☛ Exemple :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4}{x(x+1)^2} . \qquad \text{On a } d° \, P(x) > d° \, Q(x).$$

$x\,(x + 1)^2 = x\,(x^2 + 2x + 1).$
$\quad = x^3 + 2x^2 + x.$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^3 + 2x^2 + x \\ \cline{2-2} x^4 + 2x^3 + x^2 & x - 2 \\ \hline -2x^3 - x^2 & \\ 2x^3 + 4x^2 + 2x & \\ \hline 3x^2 + 2x & \end{array}$$

$$\frac{x^4}{x(x+1)^2} = \frac{x^4}{x^3+2x} = (x-2) + \frac{3x^2+2x}{x^3+2x^2+x}.$$

$$= (x-2) + \frac{3x+2}{(x+1)^2}.$$

Calcul de $I = \int \frac{x^4}{x(x+1)^2}\,dx.$

$$I = \int x-2 \; dx + \int \frac{3x+2}{(x+1)^2}\,dx.$$

On pose: $I_1 = \int x-2 \; dx.$

$$I_2 = \int \frac{3x+2}{(x+1)^2}\,dx.$$

$$I_2 = \int \frac{3x+2}{(x+1)^2}\,dx. = 3 \int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx.$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x+1-1}{x^2+2x+1}\,dx + \int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{3}{2} [\int \frac{2x+1}{(x+1)^2} dx - \int \frac{1}{(x+1)^2} dx] + \int \frac{2}{(x+1)^2} dx.$$

$$= \frac{3}{2} [\log (x + 1) + \frac{1}{x+1}] - \frac{2}{x+1}.$$

Donc : $I + I_1 + I_2$.

☛ Exercice :

Calculer : $\int \frac{2x+1}{(x+1)(x^2+1)} dx$

$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$.

* Calculer A :

$A = [R(x) \times (x+1)]_{x=-1} = - \frac{1}{2}$

* Calculer B :

$\frac{2x^2}{x^3} = \frac{Ax}{x} + \frac{Bx^2}{x^2} = A + B = 0$

$\Rightarrow B = - A = \frac{1}{2}$.

* Calculer C :

On donne à $x = 0$. Donc $1 = A + \frac{C}{1} \Rightarrow A + C = 1$.

$\Rightarrow C = 1 – A$.

$\Rightarrow C = \frac{3}{2}$.

$$I = \int \frac{-1/2}{(x+1)} dx + \int \frac{\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)}{(x^2+1)} dx.$$

$I = - \frac{1}{2} \log|x + 1| + I_2$

$$I_2 = \int \frac{\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)}{(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x+3}{x^2+1} dx.$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} dx.$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} dx.$$

$$= \frac{1}{4} \log (x^2 + 1) + \frac{3}{2} \text{ artang } x.$$

$$I = -\frac{1}{2} \log|x + 1| + \frac{1}{4} \log (x^2 + 1) + \frac{3}{2} \text{ artang } x.$$